Problemas de optimización en economía:

Procesos con saltos

Pablo Azcue

II MACI 2009

Rosario, 14 al 16 de Diciembre de 2009

Indice

1. Modelo: Cramér-Lundberg.

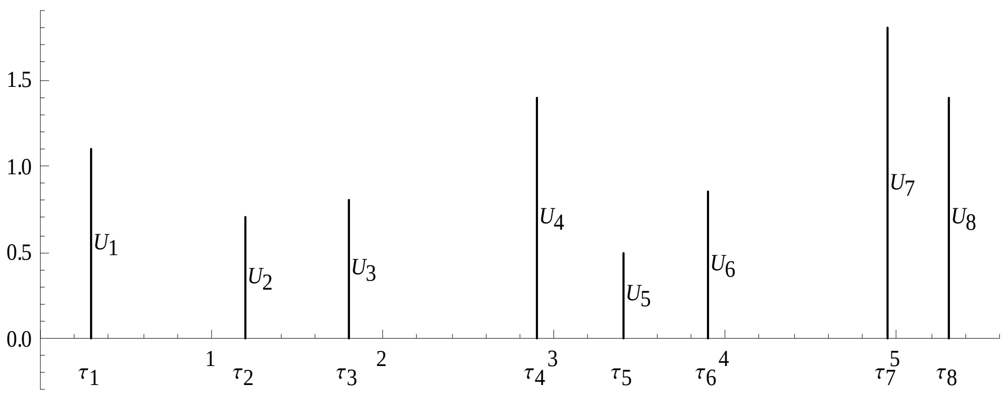
Queremos modelizar la reserva de una Compañia de Seguros con una cartera de clientes **constante**. Suponemos que la compañia recibe un flujo constante de dinero de sus clientes (los asegurados) y que con el dinero de su reserva esta paga los reclamos de sus asegurados.

Tanto los momentos en que recibe los reclamos como el monto de cada reclamo son variables aleatorias. Intentamos describir cuales son las distribuciones de estas variables aleatorias.

Llamamos $\tau_1 < \tau_2 < \tau_2 < \cdots$ a los tiempos de los reclamos ordenados por orden de llegada, y $U_1, U_2, U_3, \ldots$ a los tamaños de los correspondientes reclamos. Definimos N_t como la cantidad de reclamos que se realizaron hasta tiempo t, es decir

$$N_t = \max\{i : \tau_i \leq t\}.$$

Los tiempos τ_i y los tamaños U_i de cada reclamo son variables aleatorias y la cantidad N_t es un proceso aleatorio.



Distribucion de los reclamos

Hacemos las siguientes suposiciones acerca de los reclamos.

Suposición A *La cantidad de reclamos en cada intervalo del tiempo es finita.* Es decir $N_t < \infty$ para todo valor $t \in \mathbf{R}$.

Suposición B *La cantidad de reclamos que se producen en un intervalo de tiempo solo depende del largo del intervalo.* Mas precisamente, si $t_1 < t_2$ y $\Delta t > 0$, entonces par cualquier $k \geq 0$ vale que

$$P(N_{t_1+\Delta t} - N_{t_1} = k) = P(N_{t_2+\Delta t} - N_{t_2} = k).$$

Suposición C *La cantidad de reclamos que se producen en dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes.* Es decir, si $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ y $k, l \geq 0$ entonces

$$P(N_{t_2} - N_{t_1} = k, N_{t_4} - N_{t_3} = l) = P(N_{t_2} - N_{t_1} = k) \cdot P(N_{t_4} - N_{t_3} = l).$$

Suposicion D *Los tamaños de los reclamos son independientes entre si e independientes del momento en que ocurren.* Es decir, dados $i,\ j \in \mathbf{N}$ y $a, b, t \in \mathbf{R}$, tenemos que

$$P(U_i \leq a; U_j \leq b) = P(U_i \leq a) \cdot P(U_j \leq b)$$
$$P(U_i \leq a; \tau_j \leq t) = P(U_i \leq a) \cdot P(\tau_j \leq t).$$

Suposición E *Los tamaños de los reclamos están identicamente distribuidos.* Es decir, que dados $i,\ j \in \mathbf{N}$ y $a \in \mathbf{R}$, tenemos que

$$P(U_i \leq a) = P(U_j \leq a).$$

Las dos últimas suposiciones nos dicen que las variables aleatorias U_i son **i.i.d.** (*independientes e identicamente distribuidas*), llamemos $F(a) = P(U \leq a)$. Notar que por la forma en que definimos la función de distribución, vale que $F(0) = 0$.

Las tres primeras suposiciones permiten caracterizar las probabilidades asociadas al proceso estocástico N_t y a las variables aleatorias τ_i: N_t es un *proceso de Poisson* de intensidad β.

Bajo las suposiciones anteriores, el proceso

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

se llama *proceso de Poisson* compuesto de intensidad β y distribución F.

Tanto N_t como Y_t son procesos de incrementos estacionarios (suposición B) y de incrementos independientes (Suposición C).

1.1. Procesos de Poisson.

Hay un $\beta \geq 0$, tal que

$$P(N_t = k) = \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t} \tag{1.1}$$

además, tenemos las siguientes propiedades

1. $P(\tau_1 > t) = P(\tau_{i+1} - \tau_i > t) = e^{-\beta t}$. Esto es la probabilidad que empezando en cualquier momento, no haya ningún reclamo hasta el tiempo t es una exponencial $e^{-\beta t}$.
2. $P(\tau_1 \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$ y por lo tanto la variable aleatoria τ_1 tiene distribución $1 - e^{-\beta t}$ y densidad $\beta e^{-\beta t}$
3. $E(\tau_1) = E(\tau_{i+1} - \tau_i) = \int_0^\infty t\beta e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta}$.
4. $E(N_{t+\Delta t} - N_t) = E(N_{\Delta t}) = \beta \Delta t$, es decir que la cantidad esperada de reclamos en un intervalo de tiempo es β multiplicada por el largo del intervalo.

1.2. Notación de probabilidades.

En este modelo, el espacio muestral Ω es el de los pares de sucesiones $\omega = (\overline{\tau}, \overline{U})$ donde $\overline{\tau} = (\tau_i)_{i\in\mathbf{N}}$ es una sucesión crecientes con límite infinito y $\overline{U} = (U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de números no-negativos. En las variables aleatorias omitiremos la escritura de ω, es decir escribiremos τ_i en lugar de $\tau_i(\omega)$, U_i en lugar de $U_i(\omega)$, etc.

1.3. ¿Cómo calcular la prima p?

El monto total de los reclamos que la compañia de seguros esperan pagar en un lapso de largo t se puede calcular como

$$E(\sum_{i=1}^{N_t} U_i) = E(N_t)E(U_i) = \beta\mu t$$

donde

$$\mu = E(U_i) = \int_0^\infty a\ dF(a)$$

El método usual de calcular la prima es

$$p = \beta\mu(1+\eta)$$

donde $\eta > 0$ es el sobreprecio que los clientes le pagan a la compañia de seguros por hacerse cargo del riesgo.

1.4. Descripción del proceso de reserva. Ruina.

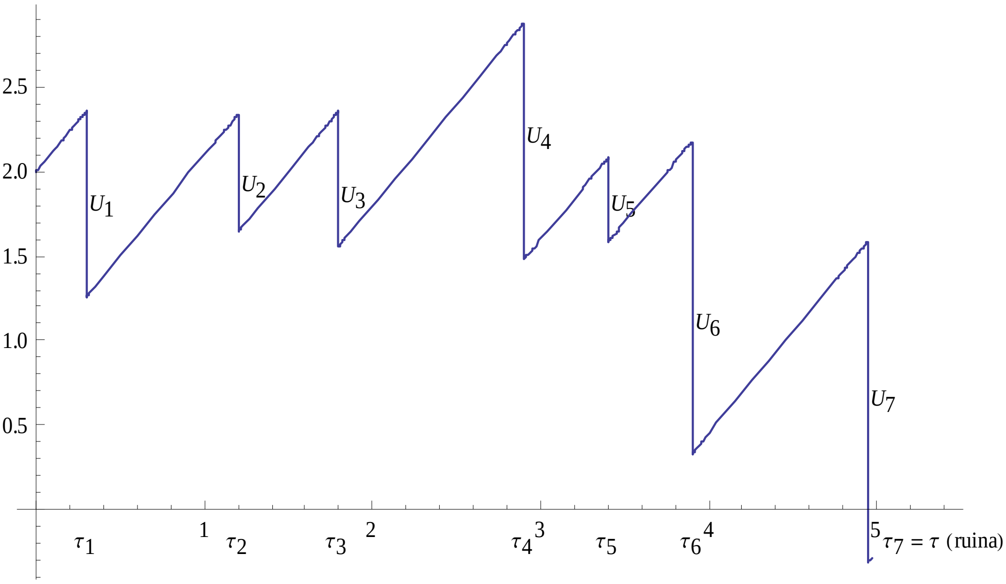
La reserva X_t de la compañia de seguros en el instante t, es

$$X_t = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

donde x es la reserva inicial de la compañia. Cada trayectoria $X_t(\omega)$ es continua a derecha (es decir $X_t = X_{t^+}$) y $.X_t - X_{t^-}$ solo es positiva en $t = \tau_i$ y vale $-U_i$. Llamamos **tiempo de ruina** de la compañia al primer momento en que la reserva se hace negativa.

$$\tau = \min\{t : X_t < 0\}$$

Notar que o bien $\tau = \tau_i$ para algún i, o bien $\tau = \infty$.



Proceso de la reserva hasta la ruina

El tiempo de ruina τ es un *tiempo de parada* (solo depende de los τ_i y U_i con $i \leq t$). Se puede demostrar que si $\eta > 0$, vale que $P(\tau < \infty) \in (0, 1)$.

1.5. Un ejemplo.

Supongamos que la compañia de seguros tiene 5000 clientes que aseguraron su auto contra robo y 10000 clientes que aseguraron su moto contra robo.

La compañia les paga a sus clientes 40000\$ por auto robado y 2000\$ por moto robada. Las estadísticas dicen que el valor esperado de autos robados por mes es de 4 por cada mil y el valor esperado de motos robadas por mes es de 10 por cada mil. La compañia trabaja con un sobreprecio de $\eta = 20\%$. ¿Cuanta paga cada dueño de moto y cada dueño de auto de prima por mes? ¿Cuáles son p, β y F?

Prima de asegurado por auto: $40000 \times \frac{4}{1000} \times 1.2 = 192\$$ por mes

Prima de asegurado por moto: $2000 \times \frac{10}{1000} \times 1.2 = 24\$$ por mes

Prima $p = 5000 \times 192 + 10000 \times 24 = 1200\,000\$$ por mes.

Intensidad $\beta = 5000 \times \frac{4}{1000} + 10000 \times \frac{10}{1000} = 120$ reclamos por mes.

Distribución F: la probabilidad de que un reclamo sea de 2000\$ (por una moto) es de $\frac{10000 \times \frac{10}{1000}}{120} = \frac{5}{6}$ y la probabilidad de que el reclamo sea de 40000\$ (por un auto) es de $\frac{5000 \times \frac{4}{1000}}{120} = \frac{1}{6}$. Tenemos entonces que

$$F(a) = P(U \leq a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < 2000 \\ \frac{5}{6} & \text{si} \quad 2000 \leq a < 40000 \\ 1 & \text{si} \quad a \geq 40000 \end{cases}$$

y, por lo tanto

$$\mu = E(U) = \int_0^\infty a \; dF(a) = 2000 \times \frac{5}{6} + 40000 \times \frac{1}{6} = \frac{25\,000}{3}$$

podemos ver nuevamente que $p = \mu\beta(1+\eta) = \frac{25\,000}{3} \times 120 \times 1.2 = 1200\,000\$$ por mes.

Notar que usamos que la suma de dos procesos de Poisson es un nuevo proceso de Poisson con intensidad igual a la suma de las intensidades, y el mismo resultado vale con los procesos de Poisson compuestos, redefiniendo la nueva distribución de forma adecuada, ¿es esta la fórmula:

$$F(a) = \frac{\beta_1 F_1(a) + \beta_2 F_2(a)}{\beta_1 + \beta_2}?$$

1.6. Un proceso similar: colas en un procesador con buffer.

Pensemos en una impresora conectada a la red que puede imprimir hojas a velocidad p (en hojas por minuto), recibe pedidos de impresión en distintos momentos τ_i y de distinto tamaño U_i que son guardados en un buffer con capacidad de memoria $\widehat{X}$ (los pedidos de impresión que no entran en el buffer son rechazados).

Podemos suponer que las variables aleatorias τ_i y U_i satisfacen las cinco suposiciones que hicimos antes. En este caso, el proceso X_t que modela la cantidad de memoria disponible en el buffer en el momento t, sigue la ley

$$X_t = \min\{x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \widehat{X}\}$$

donde x es la cantidad de memoria disponible en el momento inicial. El modelo de Cramér-Lundberg coincide con el de un procesador con buffer infinito.

2. Dividendos y problema de optimización.

2.1. Estrategias de pago de dividendos: estrategias predecibles y admisibles.

Suponemos ahora que la gerencia de la compañia de seguros saca dinero de las reservas para pagarle dividendos a los accionistas, la estrategia de pago de dividendos queda caracterizada por el proceso estocástico L_t definido como la cantidad de dividendos acumulados que paga la gerencia hasta el momento t. Notar que L_t es un proceso creciente con $L_0 = 0$. Para que la estrategia de pago de dividendos tenga sentido, este proceso estocástico debe satisfacer tres condiciones:

- Debe ser *predecible* con respecto al proceso $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$, es decir que cuando se decide cuanto vale L_t solo se conoce el valor de los U_i y τ_i para $\tau_i < t$ (y no $\leq$).
- Debe ser *continuo a izquierda*, es decir $L_t = L_{t^-}$ (es consecuencia de lo anterior)
- Se debe cumplir que $L_t \leq X_t$, es decir no se puede ir a la ruina por pago de dividendos.

Los procesos que cumplen estas tres propiedades los llamamos *admisibles*.

2.2. Función a maximizar.

Nuestro problema es encontrar la estrategia que *maximice* el valor esperado de los dividendos acumulados descontados segun la tasa de impaciencia c :

$$E(\int_0^{\tau} e^{-cs} dL_s)$$

entre todos los procesos L admisibles.

Esta expresión es el valor actual (según su propia tasa de descuento) de lo que los accionistas esperan obtener por su inversión en la compañia. Algunos autores (por ejemplo, Modigliani y Sethi) consideran que este número es el valor real de la compañia.

Notar que, si la gerencia usa la estrategia de pago dividendos correspondiente al proceso $L = (L_t)_{t \geq 0}$, la reserva de la compañia seguirá el proceso controlado

$$X_t^L = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i - L_t$$

y el nuevo tiempo de ruina τ^L dependerá de L. El juego está en que si uno paga muchos dividendos al principio, la reserva de la compañia sera baja y la ruina vendrá mas rápido, perdiendo la posibilidad de seguir pagando los dividendos en el futuro.

Por lo tanto, definimos las funciones de valor

$$V_L(x) = E(\int_0^{\tau^L} e^{-cs} dL_s)$$

y

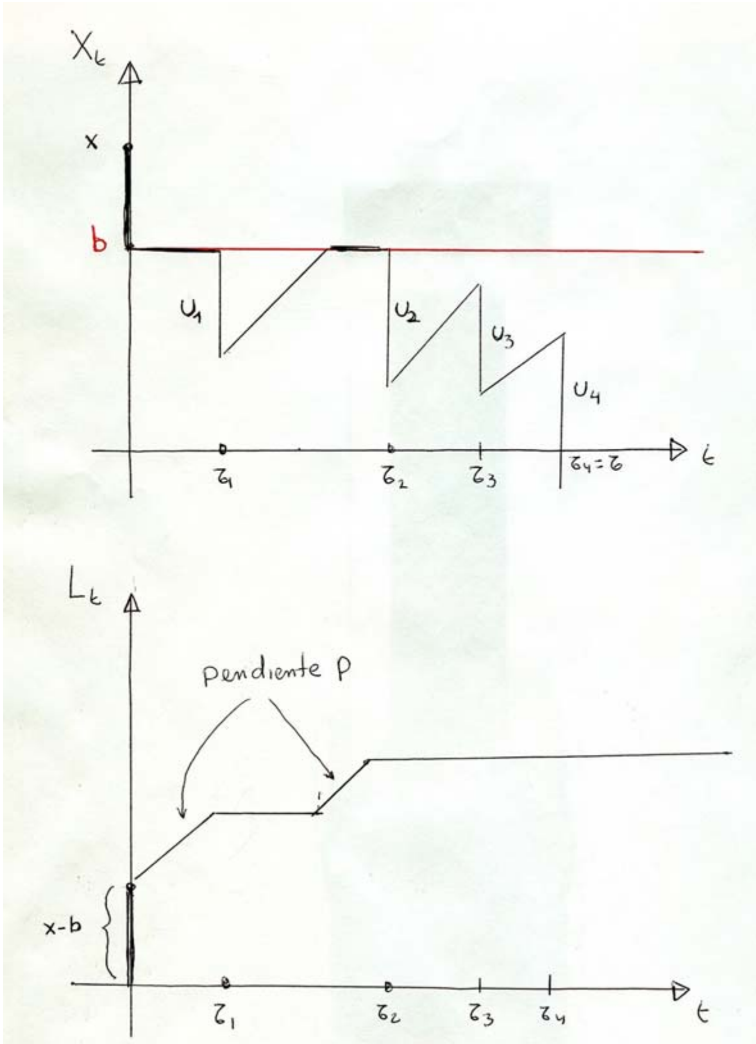
$$V(x) = \sup_{L \text{ admisible}} V_L(x).$$

Queremos encontrar la función V y ver si hay una estrategia óptima L^* tal que $V = V_{L^*}$.

2.3. Ejemplo: estrategia de barrera.

Un ejemplo de estrategia admisible son las llamadas estrategias de barrera. Fijada una barrera b, la estrategia L^b consiste en:

- Si la reserva es mayor que b, pagar inmediatamente el monto que excede a como dividendos.
- Si la reserva es igual a b, pagar la prima que se recibe como dividendos, de esta manera la reserva se mantiene constante b hasta que llegue el próximo reclamo.
- Si la reserva es menor que b, no pagar dividendos.



Reserva y Dividendos en Estrategia Barrera

Aunque mas adelante vamos a calcular la función de valor $V_{L^b}(x)$ para estas estrategias, la cuenta es muy fácil en el caso que b sea cero. En efecto, la estrategia es pagar x inmediatamente como dividendos y después pagar la prima que se recibe hasta el momento de la ruina, que es el primer reclamo pues la reserva se mantenía nula.

$$\begin{array}{rcl} V_{L^0}(x) & = & x + V_{L^0}(0) \\ & = & x + E(\int_0^{\tau_1} e^{-cs} dL_s) \\ & = & x + E(\int_0^{\tau_1} e^{-cs} pds) \\ & = & x + E(p\frac{1-e^{-c\tau_1}}{c}) \\ & = & x + \frac{p}{c} - \frac{1}{c}E(e^{-c\tau_1}) \\ & = & x + p(\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\int_0^{\infty} e^{-ct}\beta e^{-\beta t} dt) \\ & = & x + p\left(\frac{1}{c} - \frac{\beta}{c}\frac{1}{c+\beta}\right) \\ & = & x + \frac{p}{c+\beta} \end{array}$$

3. Solución del problema.

3.1. Plan para resolver el problema.

El plan para resolver el problema es el siguiente:

1. Encontrar que ecuación diferencial resuelve V.
2. Resolver esta ecuación diferencial por métodos analíticos o numéricos..
3. Deducir la estrategia óptima a partir de la forma que tiene V.

3.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Supongamos que la función V tiene derivada continua. Consideremos la estrategia $L = L_{h,a}$ que consiste en pagar un flujo constante a de dividendos hasta el $\min\{h, \tau_1\} = h \wedge \tau_1$ y después seguir la estrategia óptima L^*, la reserva controlada X_t^L sigue el proceso

$$X_t^L = \begin{cases} x + (p-a)t & \text{si} \quad t \leq \tau_1 \\ x + (p-a)t - U_1 & \text{si} \quad t = \tau_1 \end{cases}$$

Podemos escribir entonces, suponiendo que h es lo suficientemente pequeño para que $x+(p-a)t > 0$ para $t \leq h$,

$$
\begin{array}{lrcl}
 & V(x) \geq V_L(x) & = & E(\int_0^{\tau^L} e^{-cs} dL_s) \\
 & & = & E(\int_0^{h\wedge\tau_1} e^{-cs} dL_s + \int_{h\wedge\tau_1}^{\tau^L} e^{-cs} dL_s) \\
 & & = & E(\int_0^{h\wedge\tau_1} e^{-cs} a\ ds + \int_{h\wedge\tau_1}^{\tau^L} e^{-cs} dL_s) \\
 & & = & E(a\frac{1-e^{-c(h\wedge\tau_1)}}{c} + e^{-c(h\wedge\tau_1)} V(X^L_{h\wedge\tau_1})) \\
(3.1) & & = & E(\left(a\frac{1-e^{-ch}}{c} + e^{-ch} V(X^L_h)\right) I\{h < \tau_1\}) \\
 & & & +E(\left(a\frac{1-e^{-c\tau_1}}{c} + e^{-c\tau_1} V(X^L_{\tau_1})\right) I\{h \geq \tau_1\}) \\
 & & = & \left(a\frac{1-e^{-ch}}{c} + e^{-ch} V(x+(p-a)h\right) P(\{h < \tau_1\}) \\
 & & = & \left(a\frac{1-e^{-ch}}{c} + e^{-ch} V(x+(p-a)h\right) e^{-\beta h} \\
 & & & +\int_0^h \left(a\frac{1-e^{-ct}}{c} + e^{-ct}\left(\int_0^\infty V(x+(p-a)t-\alpha) dF(\alpha)\right)\right) \beta e^{-\beta t} dt
\end{array}
$$

pasando el $V(x)$ restando y dividiendo por h, obtenemos

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 0 & \geq & a\frac{1-e^{-ch}}{ch} e^{-\beta h} + \frac{e^{-(c+\beta)h} V(x+(p-a)h - V(x)}{h} \\
 & & & +\frac{1}{h}\int_0^h \left(a\frac{1-e^{-ct}}{c} + e^{-ct}\left(\int_0^\infty V(x+(p-a)t-\alpha) dF(\alpha)\right)\right) \beta e^{-\beta t} dt \\
(3.2) & & = & a\frac{1-e^{-ch}}{ch} e^{-\beta h} + e^{-(c+\beta)h} \frac{V(x+(p-a)h - V(x)}{h} + V(x)\frac{e^{-(c+\beta)h}-1}{h} \\
 & & & +\frac{1}{h}\int_0^h \left(a\frac{1-e^{-ct}}{c} + e^{-ct}\left(\int_0^\infty V(x+(p-a)t-\alpha) dF(\alpha)\right)\right) \beta e^{-\beta t} dt
\end{array}
$$

y tomando el límite cuando $h \to 0$.

$$
\begin{array}{lrcl}
(3.3) & 0 & \geq & a + V'(x)(p-a) - (c+\beta)\, V(x) + \beta \int_0^\infty V(x-\alpha) dF(\alpha) \\
 & & = & a(1-V'(x)) + pV'(x) - (c+\beta)\, V(x) + \beta \int_0^\infty V(x-\alpha) dF(\alpha)
\end{array}
$$

Podemos concluir entonces que

$$
(3.4) \qquad 0 \geq \sup_a \left(a(1-V'(x)) + \underbrace{pV'(x) - (c+\beta)\, V(x) + \beta \int_0^\infty V(x-\alpha) dF(\alpha)}_{\mathcal{L}(V)(x)} \right)
$$

y por lo tanto concluimos que,

1. $\mathcal{L}(V)(x) \leq 0$.
2. $1 - V'(x) \leq 0$.
3. Si $1 - V'(x) < 0$ entonces el supremo se alcanza cuando $a = 0$.

Las dos primeras conclusiones se pueden escribir como

$$
\max\{1 - V'(x), \mathcal{L}(V)(x)\} \leq 0,
$$

si uno hace las comparaciones con estrategias mas sofisticadas, se llega a la conclusión que

$$\max\{1 - V'(x), \mathcal{L}(V)(x)\} = 0. \tag{3.5}$$

y esta es la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman** de este problema.

3.3. Algunas propiedades de la función V.

La función V resulta ser continua, creciente y Lipschitz. También se puede probar que tiene crecimiento lineal con pendiente 1 en el infinito, es decir $\lim_{x\to\infty} \frac{V(x)}{x} = 1$. *No es claro, a partir de la definición, si V es o no derivable.*

3.4. Ecuaciones y estrategias.

Notar que si una función V con derivada continua cumple HJB, entonces van a existir conjuntos abiertos

$$\mathcal{B} = \{x : \; V'(x) = 1 \text{ y } \mathcal{L}(V)(x) < 0\}$$

y

$$\mathcal{C} = \{x : \; \mathcal{L}(V)(x) = 0 \text{ y } V'(x) > 1\}$$

y un conjunto cerrado

$$\mathcal{A} = \{x : \; \mathcal{L}(V)(x) = 0 \text{ y } V'(x) = 1\}$$

Nos preguntamos cuales son las estrategias L que hacen que V^L cumpla las ecuaciones $V' = 1$ o $\mathcal{L}(V) = 0$ en conjuntos abiertos y que haga que V^L cumpla ambas $V'(x) = 1$ y $\mathcal{L}(V)(x) = 0$ en un punto.

- Si hacemos cuentas similares a (3.1), (3.2) y (3.3) pero con la estrategia L que consiste en no pagar dividendos ($a = 0$) y continuar con esta misma estrategia, obtenemos que

$$0 = pV_L'(x) - (c+\beta)\, V_L(x) + \beta \int_0^\infty V_L(x-\alpha) dF(\alpha) = \mathcal{L}(V)(x)$$

- Si consideramos la estrategia L que consiste en pagar inmediatamente como dividendos toda la reserva que exceda y, tenemos que $V(x) = (x-y) + V(y)$ para todo $x \geq y$, y por lo tanto $V' = 1$ en el intervalo (y, x).

- Si consideramos la estrategia L que consiste en pagar toda la prima p como dividendos (manteniendo la reserva constante) hasta el primer reclamo y luego continuamos con la estrategia óptima, tendremos que

$$\begin{array}{rcl} V_L(x) & = & E(\int_0^{\tau_1} e^{-cs} dL_s + \int_{\tau_1}^{\tau^L} e^{-cs} dL_s) \\ & = & E(\int_0^{\tau_1} e^{-cs} p ds + e^{-c\tau_1} V(x - U_i)) \\ & = & E(p\frac{1-e^{-c\tau_1}}{c} + e^{-c\tau_1} V(x - U_i)) \\ & = & \int_0^\infty (p\frac{1-e^{-ct}}{c} + e^{-ct} \left(\int_0^\infty V(x-\alpha) dF(\alpha)\right)\beta e^{-\beta t} dt \\ & = & \frac{p}{c}(1 - \frac{\beta}{\beta+c}) + \frac{\beta}{\beta+c} \int_0^\infty V(x-\alpha) dF(\alpha \end{array}$$

que es equivalente a decir que

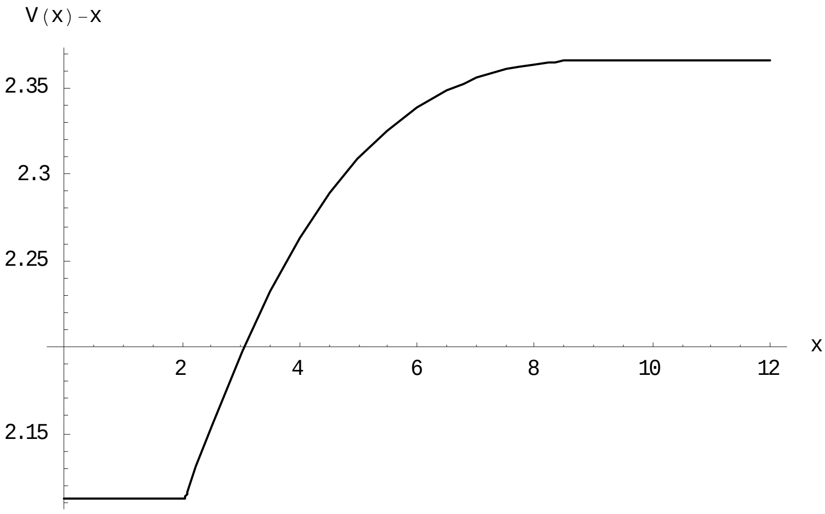
$$0 = p - (c + \beta)\, V_L(x) + \beta \int_0^\infty V(x - \alpha) dF(\alpha)$$

que corresponde (por continuidad) a los puntos con $V' = 1$ y $\mathcal{L}(V) = 0$.

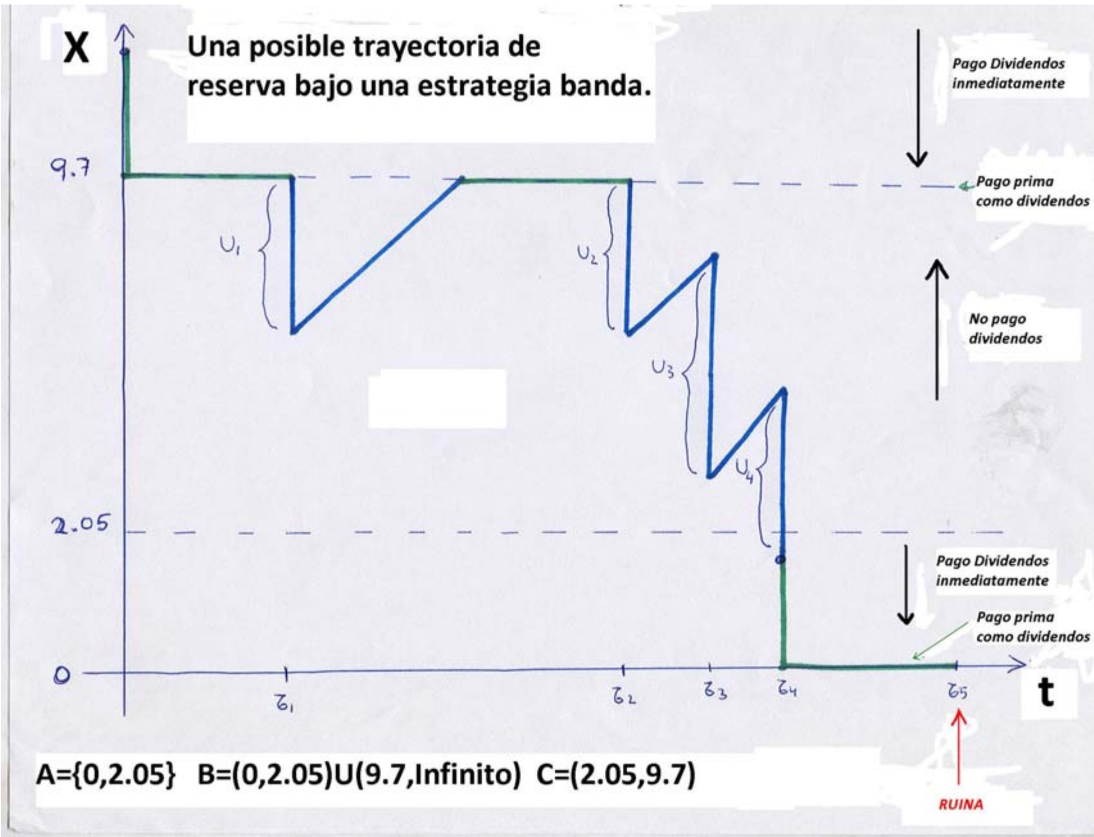
Concluimos que si la función V es diferenciable, podemos encontrar, basados en los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ que definimos anteriormente, una estrategia L tal que la función V_L satisfaga la misma ecuación que V. Esta estrategia solo depende de la reserva en cada momento y va a ser la estrategia óptima:

- Si $x \in \mathcal{A}$, pagar toda la prima p como dividendos
- Si $x \in \mathcal{B}$, pagar inmediatamente como dividendos toda la suma que exceda al extremo inferior de la componente conexa de B que contenga a x.
- Si $x \in \mathcal{C}$, no pagar dividendos.

Por ejemplo si el gráfico de $V(x) - x$ es (le restamos x para que el conjunto de los puntos donde $V' = 1$ se vea mas claramente)



tendría que la estrategia óptima es de la siguiente forma (estrategia banda):



3.5. Todas las soluciones de HJB y caracterización de V

La ecuación de HJB

$$\max\{1 - W'(x), \mathcal{L}(W)(x)\} = 0.$$

tiene infinitas soluciones, pero debemos caracterizar cual de ellas es la función de valor V. Se puede probar los siguientes

1. Para cada valor $b \in \mathbf{R}$, existe *a lo sumo* una solución W de la ecuación de HJB (entre las que tienen crecimiento lineal con pendiente 1) con valor inicial $W(0) = b$.

2. Para valores de b suficientemente grandes, la única solución es $W(x) = b + x$.

3. Para valores positivos de b suficientemente pequeños, no hay solución.

4. **Teorema Principal:** Dada cualquier solución W de la ecuación de HJB y cualquier estrategia admisible L, vale que $W(x) \geq V_L(x)$ para todo x.

Esto nos permite caracterizar la función V como **la menor solución de la ecuación de HJB**.

3.6. Estrategias de banda.

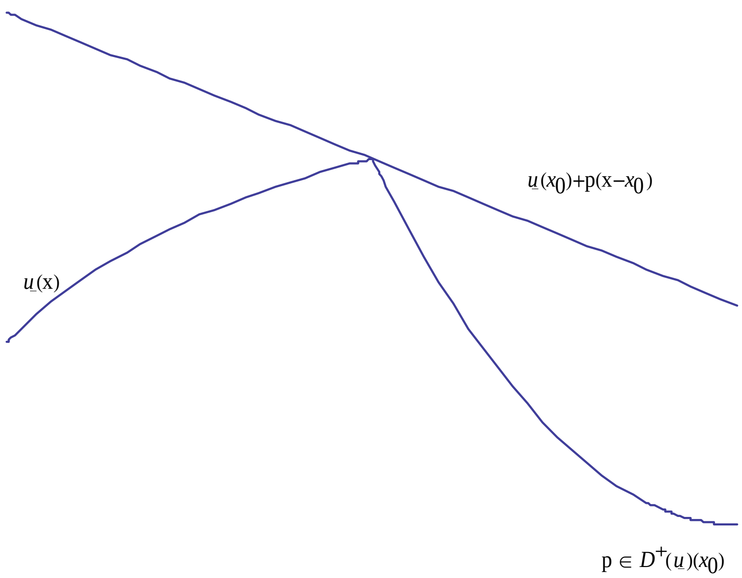
Además, el hecho que V sea la menor solución de la ecuación de HJB, nos permite encontrar ciertas propiedades sobre los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Con estas propiedades podemos probar que la función de valor V_L de la estrategia construida usando los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ coincide con la función V, y por lo tanto hay una estrategia óptima y tiene estructura de **estrategia de banda**.

4. Problemas con la diferenciabilidad.

El problema es que no podemos suponer que V es continuamente diferenciable, y esto complica todo porque tanto en la ecuación de HJB como en la construcción de los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ se usaba fuertemente esta propiedad. Para arreglar esto hay que ver que la función V (que puede no ser derivable pero si es Lipschitz) satisface la ecuación de HJB en un sentido mas débil..

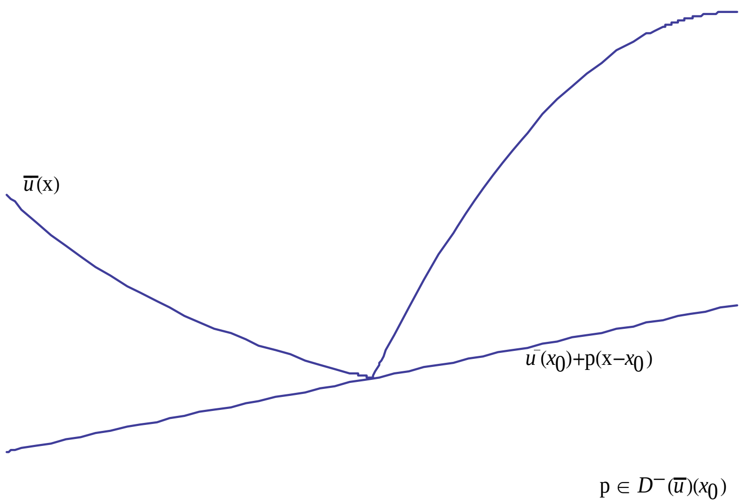
4.1. Soluciones viscosas.

Dada una función u, decimos que $p \in D^+(u)(x_0)$ (p es un *super-diferencial* de u en x_0) si $u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0)$ en un entorno de x_0



Super-diferenciales

y decimos que $p \in D^-(u)(x_0)$ (p es un *sub-diferencial* de u en x_0) si $u(x) \geq u(x_0) + p(x - x_0)$ en un entorno de x_0.



Sub-diferenciales

Dado un operador $\mathcal{L}(u)(x) = f(x, u(x), u'(x), u(\cdot))$, decimos que $\overline{u}$ es *supersolución* de $\mathcal{L}(u) = 0$ si

$$\text{para todo } p \in D^-(\overline{u})(x) \text{ vale que } f(x, \overline{u}(x), p, \overline{u}(\cdot)) \leq 0,$$

decimos que $\underline{u}$ es *subsolución* de $\mathcal{L}(u) = 0$ si

$$\text{para todo } p \in D^+(\underline{u})(x) \text{ vale que } f(x, \underline{u}(x), p, \underline{u}(\cdot)) \geq 0$$

y decimos que u es *solución viscosa* de $\mathcal{L}(u) = 0$ si es a la vez supersolución y subsolución.

Notar que

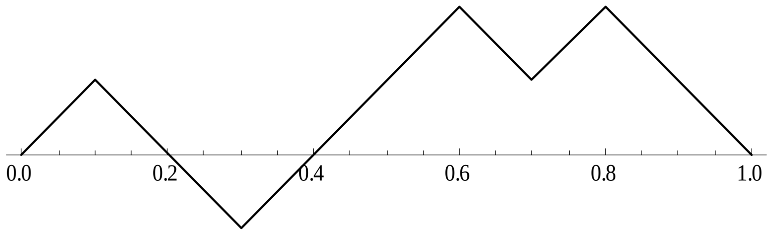
- Si u tiene super y sub-diferenciales en un punto, entonces es diferenciable en ese punto.
- Si u no es diferenciable en un punto, solo hay que hacer un test: o bien el de super-solución o bien el de subsolución..
- Una solución clásica en también una solución viscosa.
- Las soluciones viscosas de $\mathcal{L}(u) = 0$ y $-\mathcal{L}(u) = 0$ pueden ser diferentes.

4.2. Un ejemplo de solución viscosa.

Buscamos que funciones Lipschitz $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ son soluciones viscosas de

$$1 - |u'(x)| = 0 \text{ con } u(0) = u(1) = 0$$

Como u es Lipschitz, tenemos que es derivable para casi todo punto y en los puntos donde es derivable su derivada es ± 1. Supongamos para simplificar que el gráfico de u es una poligonal con segmentos de pendientes 1 y -1.



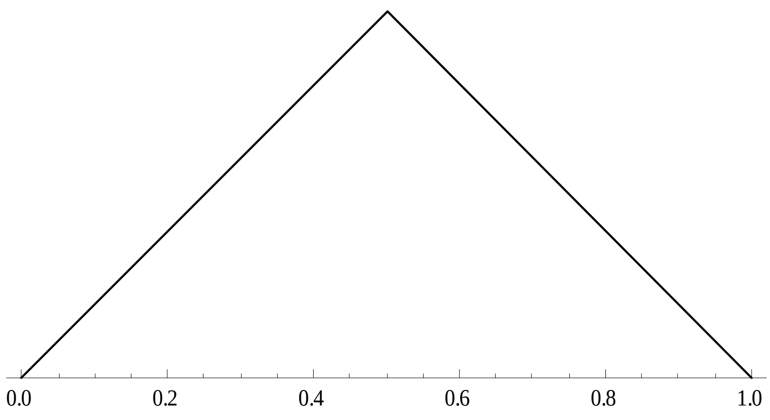
Solucion debil (pero no viscosa)

- ¿Puede ser el gráfico en un punto de la forma $\wedge$? En este caso tendríamos que $D^+(u)(x) = [-1, 1]$ y por lo tanto
$$1 - |p| \geq 0$$
entonces u sería sub-solución.

- ¿Puede ser el gráfico en un punto de la forma $\vee$? En este caso tendría que $D^-(u)(x) = [-1, 1]$ y por lo tanto habría un p tal que
$$1 - |p| \not\leq 0$$
entonces u **no sería supersolución.**

Concluimos que la única solución viscosa es

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ 1 - x & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases} = \mathbf{Dist}(x, [0,1]^C)$$



Solucion viscosa

4.3. Solución general del problema.

El problema se resuelve demostrando:

1. La función $V(x) = \sup_{L \text{ adm.}} V_L(x)$ es Lipschitz con crecimiento lineal de pendiente 1.
2. La función $V(x)$ es una solución viscosa de la ecuación de HJB
$$\max\{1 - V'(x), \mathcal{L}(V)(x)\} = 0.$$
3. La ecuación de HJB con condición inicial $V(0) = a$ y crecimiento lineal con pendiente 1 tiene, a lo sumo, una solución viscosa.
4. Dada cualquier estrategia admisible L y cualquier supersolución viscosa u de HJB, se tiene que $u \geq V_L$. Esto implica que V es la menor de las supersoluciones de HJB y que cualquier función de valor V_L que sea supersolución de HJB coincide con V.
5. La función de valor óptima V proviene de una estrategia admisible, esta estrategia admisible es estacionaria y tiene *forma de banda*.
6. Si se puede encontrar una solución W de $\mathcal{L}(W) = 0$ (por métodos analíticos o numéricos), se puede construir la función V pegando de manera apropiada W con funciones lineales de pendiente 1.
7. Hay ejemplos (dependiendo de los parámetros $\frac{c}{\beta}, \eta$ y la función de distribución F), donde la estrategia óptima es L_0 (es este caso $V(x) = x + \frac{p}{c+\beta}$), donde la estrategia óptima es barrera con barrera $b > 0$ y donde la estrategia óptima no es barrera (tiene dos bandas).

4.4. Como encontrar la función de valor V y a partir de ella la estrategia óptima.

Paso 1 Resolvemos la ecuación $\mathcal{L}(W)(x) = 0$ con $W(0) = 1$. En el caso que la distribución de los reclamos tenga una densidad que pueda escribirse como solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (por ejemplo $\lambda e^{-\lambda x}, \lambda^2\, x e^{-\lambda x},\ \frac{ae^{-\lambda_1 x}+be^{-\lambda_1 x}}{\frac{a}{\lambda_1}+\frac{b}{\lambda_2}}$, etc.), la función W también puede escribirse como solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y por lo tanto tenemos fórmula cerrada de W. En los demás casos calculamos W por métodos numéricos.

Paso 2 Se puede probar que W' es positiva y $\lim_{x\to\infty} W'(x) = \infty$. Tomamos $x_0 = \arg\min W'$, y definimos
$$V_1(x) = \begin{cases} \frac{W(x)}{W'(x_0)} & \text{si} \quad x \leq x_0 \\ \frac{W(x)}{W'(x_0)} + (x - x_0) & \text{si} \quad x > x_0. \end{cases}$$
Esta es la función de valor de la estrategia con barrera x_0, (es decir, es la estrategia inducida por los conjuntos $\mathcal{A} = \{x_0\}, \mathcal{B} = (x_0, , \infty)$ y $\mathcal{C} = [0, x_0) \cup (y_1, x_1)$), de hecho V_1 es la mejor de todas las estrategias barrera (de una banda).

Si V_1 es una solución viscosa de la ecuación, debe coincidir con V, y si no...

Paso 3 Buscamos la mejor de las estrategias dos bandas, para esto buscamos para cada $y > x_0$, una solución de $\mathcal{L}(W)(x) = 0$ con $W_y(y) = V_1(x_0)$ y definimos

$$V_y(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{si} \quad x \leq y_1 \\ W_y(x) & \text{si} \quad x > y_1 \end{cases}$$

De todas estas $V_y(x)$ habrá una sola (con $y = y_1$) que satisface que existe $x_1 > y$ con $W_y'(x_1) = \min W_y' = 1$, definimos ahora

$$V_2(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{si} \quad x \leq y_1 \\ W_{y_1}(x) & \text{si} \quad x \in (y_1, x_1) \\ W_{y_1}(x_1) + (x - x_1) & \text{si} \quad x > x_1 \end{cases}$$

Esta es la función de valor de la estrategia correspondiente a los conjuntos $\mathcal{A} = \{x_0, x_1\}$, $\mathcal{B} = (x_0, y_1) \cup (x_1, \infty)$ y $\mathcal{C} = [0, x_0) \cup (y_1, x_1)$. De hecho V_2 es la mejor de todas las estrategias de dos bandas.

Si V_2 es una solución viscosa de la ecuación, debe coincidir con V, y si no...

Este proceso debe terminar pues sabemos que la estrategia óptima existe y tiene estructura de banda.

4.5. Un ejemplo.

Tomando los parámetros: $\eta = 0.07$, $\beta = 10$ y $c = 0.1$ y la función de densidad de reclamos $f(x) = xe^{-x}$. Como la media de esta distribución es $\mu = 2$, obtenemos que $p = \mu\beta(1+\eta) = 21.4$.

1. Como la función de densidad es solución exacta de $f''(x)+2f'(x)+f(x) = 0$, las soluciones de $\mathcal{L}(W)(x) = 0$ también serán soluciones de

$$pW'''(x) + (2p - (c+\beta))W''(x) + (p - 2(c+\beta))W'(x) + (\beta f'(0) - (c+\beta))W(x) = 0$$

   y por lo tanto $W(x)$ se puede escribir de la forma

$$W(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

   donde $\lambda_1 = -1.488, \lambda_2 = -0.079$ y $\lambda_3 = 0.039$ son las raices del polinomio

$$p\lambda^3 + (2p - (c+\beta))\lambda^2 + (p - 2(c+\beta))\lambda + (\beta f'(0) - (c+\beta)) = 0$$

2. La única solución de $\mathcal{L}(W) = 0$ con $W(0) = 1$, debe satisfacer

$$W'(0) = \frac{c+\beta}{p} \text{ y } W''(0) = \left(\frac{c+\beta}{p}\right)^2 - \frac{\beta f(0)}{p}$$

   y por lo tanto se puede escribir como

$$W(x) = 0.11e^{\lambda_1 x} - 5.06e^{\lambda_2 x} + 5.95c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Como el mínimo de W' se alcanza en $x = 0$, como se ve en la figura,

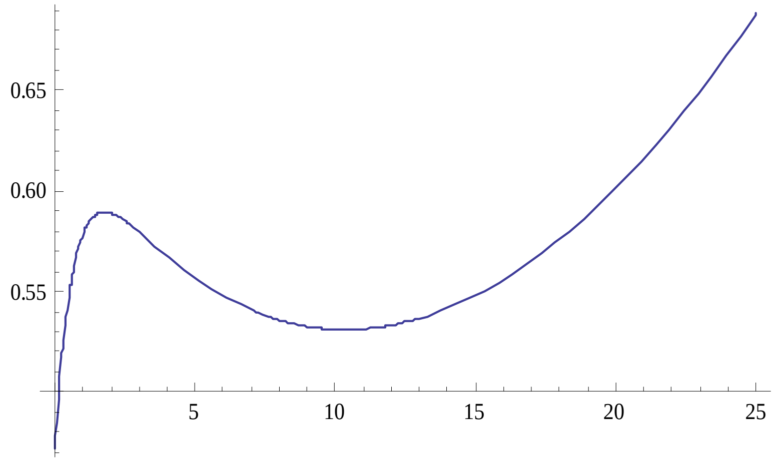


Grafico de $W'(x)$

obtenemos que $x_0 = 0$ y la mejor estrategia barrera es la de barrera 0, es decir

$$V_1(x) = x + \frac{p}{c+\beta} = x + 2.12$$

Se puede chequear que V_1 no es una solución viscosa de la ecuación de HJB, y por lo tanto debemos continuar un paso mas.

3. Buscamos, siguiendo el paso 3, la mejor de las estrategias de dos bandas: obtenemos que $y_1 = 2.05$ y $x_1 = 9.70$ y la función de valor V_2 tiene cómo gráfico

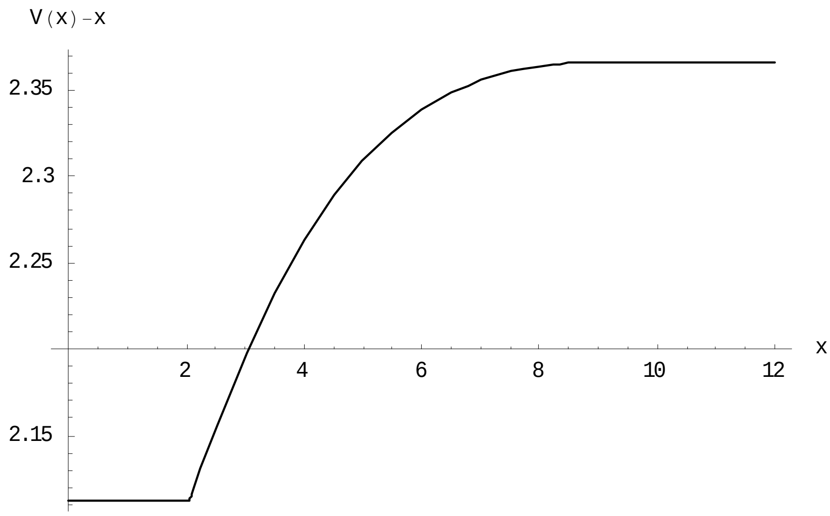
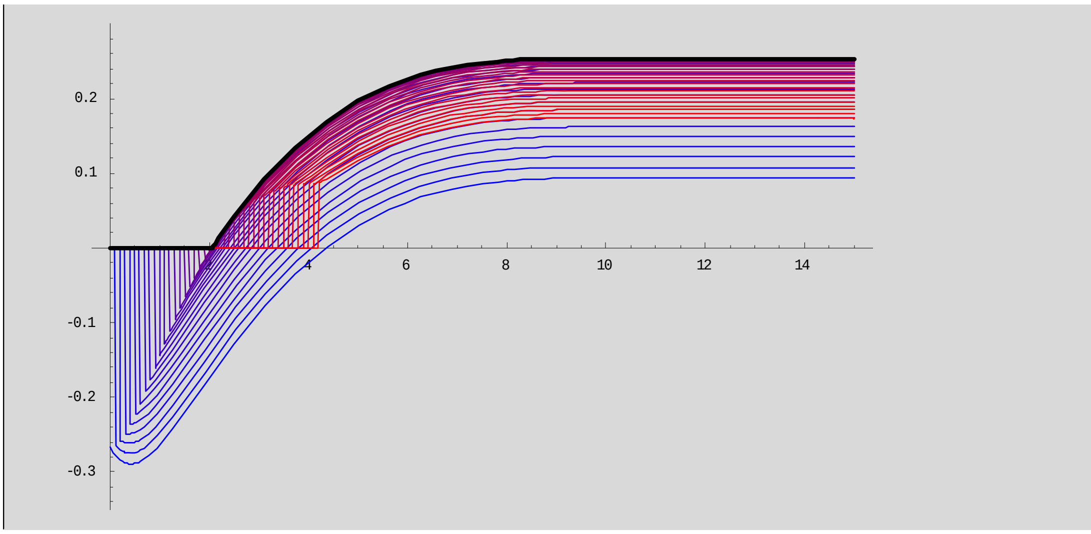


Grafico de $V_2(x) - x$

La figura de abajo muestra las funciones de valor de todas las estrategias dos bandas, y se ve que V_2 es la mayor



$V^L(x) - x - \frac{p}{c+\beta}$ para estrategias de dos bandas.

4. Se puede probar que V_2 es solución viscosa de la ecuación de HJB y entonces (por ser la función de valor de una estrategia) debe coincidir con V.

Este ejemplo donde V no es diferenciable justifica de necesidad de introducir la noción de soluciones viscosas para resolver este problema.

5. Problemas mas complicados: posibilidades de reasegurar y de invertir.

Se pueden considerar problemas mas complicados donde la gerencia la posibilidad de transferir riesgo a otra compañia mediante contratos de reaseguro o donde la gerencia tiene la posibilidad de invertir parte de la reserva en acciones.

También, en una forma similar, se pueden encontrar las estrategias de reaseguro, de inversión en la bolsa y de inversión en bienes no-líquidos que minimicen el tiempo de ruina de una compañia de seguros.

6. Apéndice.

6.1. Formulación rigurosa del espacio de probabilidad.

Denotamos $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ y $\mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$ es conjunto de sucesiones en $\mathbf{R}_+$.

Dados un par (β, F) donde $\beta > 0$ y $F : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0,1]$ es una función no-negativa, creciente continua a derecha con $\lim_{x\rightarrow\infty} F(x) = 1$, definimos nuestro espacio filtrado de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ de la siguiente manera. El espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ se define como el espacio producto

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{P}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{P}_2)$$

Donde Ω_1 es el espacio de las sucesiones positivas y crecientes con límite infinito

$$\Omega_1 = \left\{\overline{\tau} = (\tau_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}} \text{ con } \tau_i < \tau_j \text{ para } i < j \text{ y } \lim_{i\rightarrow\infty} \tau_i = \infty\right\},$$

$\mathcal{F}_1$ es la σ-álgebra definida por los conjuntos

$$A_{i,s} = \{\overline{\tau} \in \Omega_1 \text{ tal que } \tau_i \leq s\} \text{ con } i \in N \text{ y } s \geq 0.$$

y la probabilidad P_1 es la única que satisface

$$P(N_t = k) = P_1(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{i,t}\right) \cap A_{i+1,t}^c) = \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t}$$

Aquí, $N_t : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$, la variable aleatoria definida como

$$N_t\left((\tau_i)_{i\in\mathbf{N}}\right) = \max\{i : \tau_i \leq t\}$$

es un *proceso de Poisson* de intensidad β.

Ω_2 es el espacio de sucesiones

$$\Omega_2 = \left\{\overline{U} = (U_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}\ \right\},$$

$\mathcal{F}_2$ es la σ-álgebra definida por los conjuntos

$$B_{i,a} = \left\{\overline{\overline{U}} \in \Omega_2 \text{ tal que } U_i \leq a\right\} \text{ con } i \in N \text{ y } a \geq 0.$$

y la probabilidad P_2 es la única que satisface

$$P_2(\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_{i,a_i}\right)) = \prod_{i=1}^{k} F(a_i)$$

Finalmente la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ esta formada por las σ-álgebras $\mathcal{F}_t$ generada por las variables aleatorias τ_i y U_i con $\tau_i \leq t$.

6.2. Demostración del resultado sobre procesos de Poisson.

Definamos la función $f : [0,\infty) \rightarrow [0,1)$ como

$$f(t) = P(\tau_1 > t) = P(N_t = 0),$$

tenemos que,

- f es decreciente, pues N_t es creciente con respecto a t.
- $f(0) = 1$.
- f es positiva. Si existe un t_0 con $f(t_0) = 0$, tendríamos por suposiciones B y C que

$$\begin{aligned} 0 = f(t_0) &= P(N_{t_0} = 0) \\ &= P(N_{t_0} - N_{t_0/2} = 0; N_{t_0/2} = 0) \\ &= P(N_{t_0} - N_{t_0/2} = 0) \cdot P(N_{t_0/2} = 0) \\ &= P(N_{t_0} - N_{t_0/2} = 0) \cdot P(N_{t_0/2} = 0) \\ &= f(\tfrac{t_0}{2})^2 \end{aligned}$$

  y analogamente $0 = f(t_0) = f(\frac{t_0}{2}) = f(\frac{t_0}{4}) = f(\frac{t_0}{8}) = \cdots$, entonces $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$ y por lo tanto f sería identicamente cero en $(0, \infty)$. Esto contradice la suposición A.
- Existe un $\beta \geq 0$ tal que $f(t) = e^{-\beta t}$. Nuevamente, por suposiciones B y C tenemos que para todo valor $s, t \geq 0$, vale que

$$f(t + s) = f(t) \cdot f(s)$$

  Pero la única solución decreciente y no nula de esta ecuación es $f(t) = e^{-\beta t}$. Notar que las propiedades (1), (2) y (3) se deducen directamente de este resultado.

Para la fórmula (1.1), consideremos los intervalos $I_{j,n} = (\frac{(j-1)t}{n}, \frac{jt}{n}]$ con $j = 1, ..., n$ y el conjunto A_n de los $\overline{\tau} = (\tau_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tal que $N_t = k$ y hay al menos un τ_i en m de los intervalos $I_{j,m}$ y ningún τ_i en el resto de los intervalos $I_{j,n}$. Tenemos que

$$\{\overline{\tau} : N_t = k\} = A_n \cup B_n$$

donde B_n está incluido en el conjunto C_n de los $\overline{\tau} = (\tau_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tal que $N_t = k$ y hay por lo menos dos τ_i que están contenidos en el mismo $I_{j,n}$.

Pero tenemos que

$$P(A_n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(e^{-\beta \frac{t}{n}}\right)^{n-k} \left(1 - e^{-\beta \frac{t}{n}}\right)^k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t}$$

y además que $P(B_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pues $P(C_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ya que si un $\overline{\tau}$ estaría en infinitos $C_n's$ la sucesión de $\overline{\tau}$ tendría infinitos puntos en $[0, t]$ y esto contradice la suposición A.

La propiedad (4) sale de la fórmula de la esperanza

$$E(N_{\Delta t}) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(N_{\Delta t} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\beta \Delta t)^k}{k!} e^{-\beta \Delta t} = (\beta \Delta t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta \Delta t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\beta \Delta t} = (\beta \Delta t)$$

6.3. Definición de variables aleatorias y procesos adaptados y predecibles.

1. Una *variable aleatoria* A sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ con distribución F_A es una función $A : \Omega \to \mathbf{R}$ que satisface que los conjuntos

$$(A \leq a) = \{\omega \in \Omega : A(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

para todo valor $a \in \mathbf{R}$ y además cumple que

$$F_A(a) = P\,(A \leq a)\,.$$

2. Un *proceso aleatorio* $(A_t)_{t \geq 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ es una familia de variables aleatorias.
3. Un proceso aleatorio $(A_t)_{t \geq 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ se dice *adaptado* si los conjuntos

$$(A_s \leq a) \in \mathcal{F}_t$$

para todo $a \in \mathbf{R}$ y $s \leq t$.
4. Un proceso aleatorio $(A_t)_{t \geq 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ se dice *predecible* si los conjuntos

$$(A_s \leq a) \in \mathcal{F}_t$$

para todo $a \in \mathbf{R}$ y $s < t$.
5. Una variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbf{R}_+$ se dice *tiempo de parada* si los conjuntos

$$(T \leq t) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

para todo $t \geq 0$.

7. Algunas referencias.

El problema original fué introducido por De Finetti (1957) y resuelto como un límite del problema discreto asociado por Gerber (1969) quien introdujo el concepto de estrategia banda, la solución general de problema como menor solución viscosa y el método de encontrar las soluciones fue presentada por Azcue & Muler (2005) para el problema original y el problema con reaseguro y por Azcue & Muler (2010) para el problema con posibilidad de inversión.

El problema de minimizar la ruina fue resuelto por Hipp & Plum (2000) para inversión, por Schmidli (2002) para inversión y reaseguro y por Azcue & Muler (2009) para inversión con restricciónes de endeudamiento.

El concepto de solución viscosa fue introducido por Crandall, Lions & Evans (1983) y (1984).

Azcue P. and N. Muler (2005): Optimal reinsurance and dividend distribution policies

in the Cramer-Lundberg model. *Math. Finance* 15, 261-308.

Azcue P. and N. Muler (2009). Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints. *Insurance: Mathematics and Economics* 44, 26-34.

Azcue P. and N. Muler (2010). Optimal portfolio and dividend distribution policies in an insurance company. *To appear in Annals of Applied Probability.*

Crandall, M. G. and P. L. Lions (1983): Viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277, 1, 1-42.

CRANDALL, M. G., L. C. EVANS AND P. L. LIONS (1984): Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 282, 2, 487-502.

DE FINETTI, B. (1957) Su un'impostazion alternativa dell teoria collecttiva delrischio. Transactions of the XVth International Congress of Actuaries 2, 433–443.

GERBER, H. (1969): Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozeß, *Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math,* 69, 185-228.

HIPP, C. AND M. PLUM (2000). Optimal investment for insurers. *Insurance: Mathematics and Economics* 27, 215-228.

SCHMIDLI, H. (2002). On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *Ann. Appl. Probab.* 12, 890-907.